Notas de Aula Cálculo III
Equações Diferenciais - Data 16/03

Equações Diferenciais

Derivadas representam taxas de variação.
Matemáticos fazem análises diferentes das dos físicos, químicos, etc.
Desenvolver técnicas para determinar a solução.

Livro base

- Zill & Cullen – **Equações Diferenciais** (Vol. I e II)

Livros complementares

- William Boyce – **Equações Diferenciais Elementares** (3ª edição)
- Stewart – **Cálculo I**

Avaliação

- 1ª Prova: Capítulos I e II
- 2ª Prova: Capítulo IV
- 3ª Prova: Capítulo III
- 4ª Prova: Capítulo VIII (Vol II)

4 provas e 16 testes
80 + 20 - Cada 1 teste (0,5), isto é 4 testes (2,0)
Teste: resolução de exercícios durante a aula

Equações Diferenciais (ED)

1. Definição (provisória)

Uma equação diferencial (ED) é uma equação envolvendo as derivadas de uma variável dependente em relação a uma ou mais variáveis independentes.

2. Classificação de uma ED

Podemos classificar em três categorias:

- Tipo
- Ordem
- Linearidade

3. Classificação por tipo

a) Equação Diferencial Ordinária (EDO)

É uma equação que contém somente derivadas ordinárias de uma variável dependente em relação a uma única variável independente.

Exemplos

$$\text{(i)} \quad y''(t) + 5y'(t) - \sin(t)\, y(t) = e^t; \quad y = y(t) \tag{1}$$

$$\text{(ii)} \quad y'(x) - \left(\frac{x^2 + 9x}{\sqrt{x - \pi}}\right) y(x) - 35\cos(x^2) = 0; \quad y = y(x) \tag{2}$$

$$\text{(iii)} \quad (x^5 + x^2)\frac{d^3y}{dx^3} + 15\frac{dy}{dx}\, y + y^2 = e^{x^2 + \sqrt{x}}; \quad y = y(x) \tag{3}$$

Anotações: variável independente (x)*, variável dependente* (y)

b) Equação Diferencial Parcial (EDP)
É uma equação que contém derivadas parciais de uma variável dependente em relação a duas ou mais variáveis independentes.

Exemplos

$$\text{(iv)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial u}{\partial x}; \quad u(x,t) \tag{4}$$

$$\text{(v)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad u = u(x,y) \tag{5}$$

$$\text{(vi)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 = x^2 + y + \sin z; \quad u = u(x,y,z) \tag{6}$$

4. Classificação por ordem

A ordem da equação é dada pelo termo que contém a maior ordem da derivada que aparece na equação.

Exemplos

No exemplo anterior temos:

- 1ª ordem: (ii), (iv)
- 2ª ordem: (i), (v)
- 3ª ordem: (iii)
- 4ª ordem: (vi)

5. Equação diferencial ordinária de n-ésima ordem

Doravante vamos restringir apenas ao estudo de EDO's.
Seja Ω uma região do $\mathbb{R}^{n+1}$ e

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

uma função contínua, uma EDO de n-ésima ordem é uma equação dada pela expressão:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad y = y(x)$$

Exemplos anteriores

$$\text{(i)} \quad F(t, y, y', y'') = y'' + 5y' - \sin t - e^t \tag{7}$$

$$\text{(ii)} \quad F(x, y, y') = y' - \left(\frac{x^2 + 9x}{\sqrt{x - \pi}}\right) y - 35\cos(x^2) \tag{8}$$

$$\text{(iii)} \quad F(x, y, y', y'', y''') = (x^5 + x^2) + 15y' \cdot y + y^2 - e^{x^2 + \sqrt{x}} \tag{9}$$

6. Classificação de uma EDO quanto à linearidade

Uma EDO de ordem n é dita linear se tem a forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Exemplo (ordem 2):

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Observações

1. Os coeficientes $a_k(x)$, $(0 \leq k \leq n)$ dependem unicamente da variável independente x.
2. Se a EDO não possuir a forma acima, então ela é chamada de não linear.

Exemplos

São lineares as equações

$$\text{(i)} \quad x\,y' + \sin x\, y - \sqrt{x^3} = 0 \tag{10}$$

$$R = a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Entendemos}: a_1(x) = x, \quad a_0(x) = \sin x, \quad g(x) = \sqrt{x^3}$$

$$\text{(ii)} \quad (\sin^2 x + \ln x)\, y'' - y' = 0 \tag{11}$$

$$R = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Entendemos}: a_2(x) = \sin^2 x + \ln x, \quad a_1(x) = -1, \quad a_0(x) = 0, \quad g(x) = 0$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{d^5y}{dx^5} + 3\frac{d^3y}{dx^3} - 19x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 + x^5 + 3x}{x^4 - 95} \tag{12}$$

$$\textit{Entendemos}: a_5(x) = 1, \quad a_4(x) = 0, \quad a_3(x) = 3, \quad a_2(x) = -19x, \quad a_1(x) = 0, \quad a_0(x) = 0$$

$$g(x) = \frac{x^2 + x^5 + 3x}{x^4 - 95}$$

Não são lineares as equações

$$\text{(iv)} \quad (y')^2 + \sin(x)\, y = \sqrt{x^3} \tag{13}$$

Não linear pois $(y')^2$ *não está na forma linear*

$$\text{(v)} \quad x\, y'' - e^x - y^2 + \int_0^x e^{-t^2}\, dt = 0 \tag{14}$$

Não linear pois aparece y^2

$$\text{(vi)} \quad y\, y' + x^2 \cos(x^2) + y''' = 0 \tag{15}$$

Não linear pois aparece o produto $y \cdot y'$

$$\text{(vii)} \quad \sqrt{x}\, y' + y^{1/2} = 3 \tag{16}$$

Não linear pois aparece $y^{1/2}$

Observações

- Porque (iv) não é do tipo

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

- Porque (v) não é do tipo

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

- Porque (vi) não é do tipo

$$a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

- Porque (vii) não é do tipo

$$\sqrt{x}\, y' + y^{1/2} = 3$$

7. Solução de uma EDO

Definição: Uma função real ϕ de classe $C^n(I)$. (I é um intervalo não degenerado da reta) chama-se solução de uma EDO

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

Definida em I, se:

1. Para todos $x \in I$,
$$(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) \in \Omega$$
2. Para todos $x \in I$,
$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$$

Exemplos

$$y' = y^2 \qquad y = y(x)$$

$$F(x, y, y') = y' - y^2 \quad \text{ou} \quad F(x, y, y') = y^2 - y'$$

$$F(x, y, y') = 0$$

Afirmamos que $\phi(x) = \frac{1}{c-x}$ é uma solução da equação, onde c é uma constante real.

De fato:

$$\phi'(x) = (-1)(c - x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(c - x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{c - x}\right)^2 = \phi^2(x)$$

Logo,

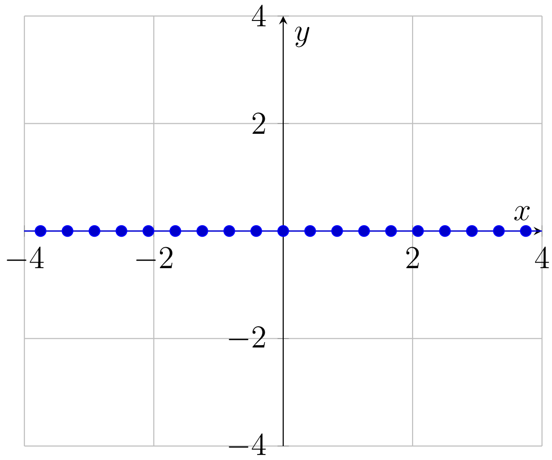
$$\phi' = \phi^2$$

Obs:

1. Se $\phi(x) = 0$, então $\phi \equiv 0$ é solução. Essa solução é chamada de solução trivial.
2. Como $c \in \mathbb{R}$, para cada c temos uma solução. Logo, a EDO possui infinitas soluções:
$$\left(\frac{1}{c - x}\right)^2 = \phi^2(x)$$

1) Solução trivial

$$\phi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad I = \mathbb{R}$$

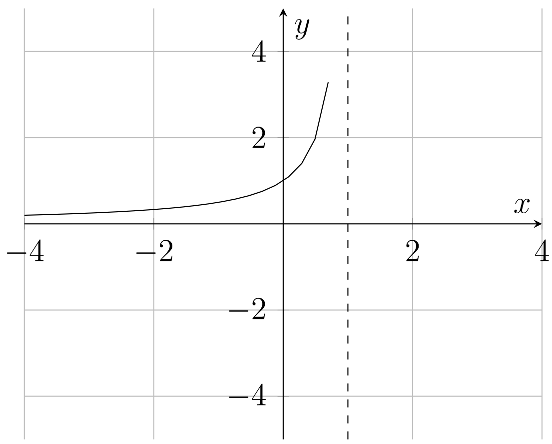


2) $c \in \mathbb{R} \quad \phi(x) = \frac{1}{c-x}$

$$c \in \mathbb{R} \quad \phi(x) = \frac{1}{c-x}$$

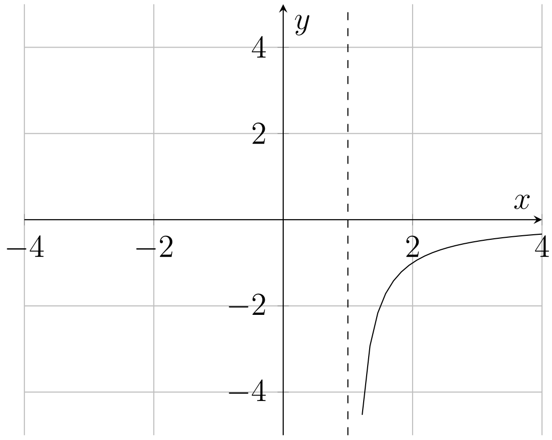
$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$$

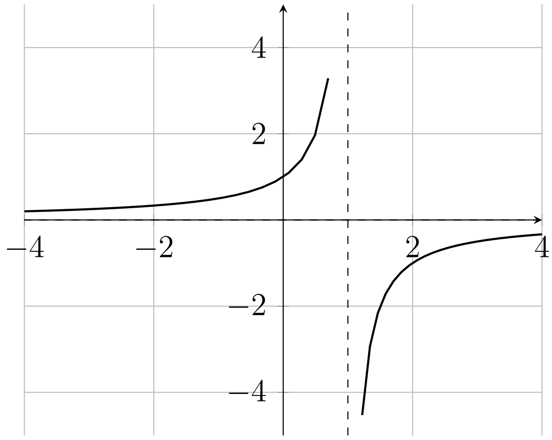
$$\lim_{x \to c^-} \phi(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to c^+} \phi(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 0$$





$$\phi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ou

$$\phi(x) = \frac{1}{c-x}, \quad \forall x \in (-\infty, c) \quad \text{ou} \quad x \in (c, +\infty)$$

(b) Considerando a EDO

$$e^{y''} = -\pi$$

$$F(x, y, y', y'') = e^{y''} + \pi \quad \text{Não existe solução!!}$$

$$(y')^2 + y^2 + 1 = 0, \quad \text{Não existe solução!!}$$

(c) Possui solução

$$(y')^2 + x^2y^2 = 0 \quad \text{Possui somente a solução trivial !!!}$$

Possui somente a solução trivial

$$\phi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observação final

Fazer exercício da página 11/12